第３講　微分法・積分法①

1　点 $(x,\ y)$ が円周 $x^2+y^2=1$ の上を動くとき，次の式の値の範囲を求めよ．

(1)　$x+y$

(2)　x^4+y^4

(3)　x^3+y^3

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　曲線 $y=ax^3-ax$ $(a\neq 0)$ 上に異なる2点P，Qがあり，Pにおける接線とQにおける接線がともに直線PQと直交している．このようなP，Qが存在するための a の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$f(x)=x^3-x^2-x-1$，$g(x)=x^2-x-1$ とする．

(1)　方程式 $f(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ．また，$1<\alpha<2$ であることを示せ．

(2)　方程式 $g(x)=0$ の正の解を β とする．α と β の大小を比較せよ．

(3)　α^2 と β^3 の大小を比較せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　微分法・積分法①

1　点 $(x,\ y)$ が円周 $x^2+y^2=1$ の上を動くとき，次の式の値の範囲を求めよ．

(1)　$x+y$　　(2)　x^4+y^4　　(3)　x^3+y^3

$(x,\ y)$ は単位円上の点より　$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$　とおける．

(1)　$x+y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ より　$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x+y\leqq\sqrt{2}}$

(2)　$x^4+y^4=\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\sin^2\theta)^2+(\cos^2\theta)^2=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-2\cdot\left(\dfrac{\sin 2\theta}{2}\right)^2=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta$　　$0\leqq\sin^2 2\theta\leqq 1$ より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq x^4+y^4\leqq 1}$

(3)　$x^3+y^3=\cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

ここで，$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$　　また，(1)より　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

よって　$x^3+y^3=t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$　　これを $f(t)$ とおくと

$f'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(t+1)(t-1)$

最大値　$f(1)=1$　　最小値　$f(-1)=-1$　　よって　$\boldsymbol{-1\leqq x^3+y^3\leqq 1}$

2　曲線 $y=ax^3-ax$ $(a\neq 0)$ 上に異なる２点Ｐ，Ｑがあり，Ｐにおける接線とＱにおける接線がともに直線PQと直交している．このようなＰ，Ｑが存在するための a の範囲を求めよ．

点Ｐ，点Ｑの x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$　$(\alpha<\beta)$　とする．

$f(x)=ax^3-ax$ とおくと　$f'(x)=3ax^2-a=a(3x^2-1)$

Ｐにおける接線の傾きは　$a(3\alpha^2-1)$　　Ｑにおける接線の傾きは　$a(3\beta^2-1)$

題意よりＰ，Ｑにおける接線が平行である．よって

$a(3\alpha^2-1)=a(3\beta^2-1)$

$a\neq 0$ より　$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=0$　　$\alpha\neq\beta$ より　$\beta=-\alpha$　……①

また，直線PQの傾きは　$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{a\{(\beta^3-\alpha^3)-(\beta-\alpha)\}}{\beta-\alpha}=a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-1)$

直交条件より　$a(3\alpha^2-1)\times a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-1)=-1$　……②

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

①を②に代入して　$\alpha^2(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)=-1$

明らかに，$\alpha \neq \pm 1,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\alpha^2=\dfrac{-1}{(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)}$

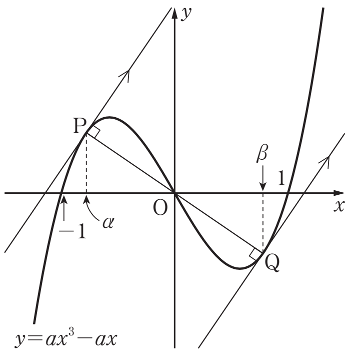
ここで　$(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)=3\left(\alpha^2-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}$　であり

$\alpha<\beta$ より　$\alpha<-\alpha$　　つまり　$\alpha<0$ より　$\alpha^2>0$

よって　$0>(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)\geqq -\dfrac{1}{3}$　より

$$\frac{1}{(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)}\leqq -3 \quad \text{つまり} \quad \alpha^2 \geqq 3$$

ゆえに　$\boldsymbol{\alpha \leqq -\sqrt{3},\ \sqrt{3} \leqq \alpha}$



3　$f(x)=x^3-x^2-x-1,\ g(x)=x^2-x-1$ とする．

(1)　方程式 $f(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ．また，$1<\alpha<2$ であることを示せ．

(2)　方程式 $g(x)=0$ の正の解を β とする．α と β の大小を比較せよ．

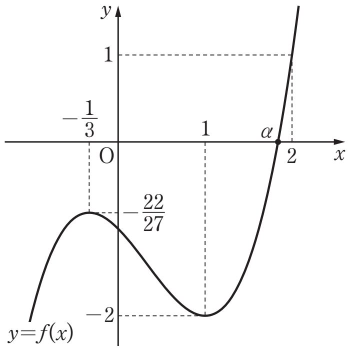
(3)　α^2 と β^3 の大小を比較せよ．

(1)　$f(x)=x^3-x^2-x-1$ より　$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

増減表よりグラフは右図．

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	↗	$-\dfrac{22}{27}$	↘	-2	↗	1	

よって　$f(x)=0$ はただ１つの実数解 α をもち，$1<\alpha<2$ である．



(2)　$g(x)=0$ より　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　よって　$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$2<\sqrt{5}<3$ より　$\dfrac{3}{2}<\beta<2$　　また，$\beta^2-\beta-1=0$

ここで　$f(x)=g(x)\cdot x-1$　より　$f(\beta)=g(\beta)\cdot\beta-1=-1<0$

ゆえに，(1)のグラフより　$\boldsymbol{\beta<\alpha}$

(3)　$\beta^2=\beta+1$ より　$\beta^3=\beta^2+\beta=2\beta+1=\sqrt{5}+2$　　よって　$4<\beta^3<5$

また　$1<\alpha<2$ より　$1<\alpha^2<4$

ゆえに　$\boldsymbol{\alpha^2<\beta^3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　単位円周上に点Pと点Qがある．線分OPがx軸の正の向きとなす角をθとし，線分OQがx軸の正の向きとなす角を3θとする．ただし，点Qは第3象限または第4象限にあるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　線分PQの中点をMとする．Mの座標をθを用いて表せ．

(2)　Mのx座標の最大値および最小値を求めよ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ に関する以下の各問いに答えよ．

(1) $f(a)=0$，$1<a<2$ を満たす実数 a が1つだけ存在することを示せ．

(2) (1)の a について，3次関数 $g(x)=x^3+bx^2+cx+d$ が $g\left(-\dfrac{1}{a}\right)=0$ を満たすように，b，c，d の値を定めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　単位円周上に点Ｐと点Ｑがある．線分OPがx軸の正の向きとなす角をθとし，線分OQがx軸の正の向きとなす角を3θとする．ただし，点Ｑは第３象限または第４象限にあるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　線分PQの中点をＭとする．Ｍの座標をθを用いて表せ．

(2)　Ｍのx座標の最大値および最小値を求めよ．

(1)　$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$　と表すことができる．

よって　$\mathrm{M}\left(\dfrac{\cos\theta+\cos 3\theta}{2},\ \dfrac{\sin\theta+\sin 3\theta}{2}\right)=\left(\dfrac{4\cos^3\theta-2\cos\theta}{2},\ \dfrac{4\sin\theta-4\sin^3\theta}{2}\right)$

$$=\boldsymbol{(2\cos^3\theta-\cos\theta,\ 2\sin\theta-2\sin^3\theta)}$$

(2)　点Ｑが第３象限または第４象限にあることより　$\pi<3\theta<2\pi$　つまり　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\cos\theta=t$とおくと　$-\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{1}{2}$

このときＭのx座標は　$2t^3-t$　　これを$f(t)$とおくと　$f'(t)=6t^2-1$

$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$のとき　$f'(t)=0$となる．

よって，$f(t)$の増減は右表．

ゆえに，最大値　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{9}}$　最小値　$\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{6}}{9}}$

t	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	↗	$-\frac{1}{4}$

講義でふれた「３次関数のグラフの性質」により，本来は端点の値を調べずとも極値が最大・最小となることはわかる．わかった上で，表を作成しながら「確かめる」ことが必要である（センター試験ではそのプロセスはとばす，ということである）．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ に関する以下の各問いに答えよ．

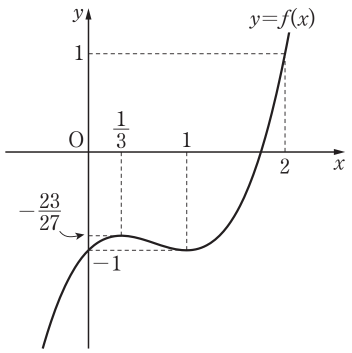
(1) $f(a)=0$，$1<a<2$ を満たす実数 a が１つだけ存在することを示せ．

(2) (1)の a について，３次関数 $g(x)=x^3+bx^2+cx+d$ が $g\left(-\dfrac{1}{a}\right)=0$ を満たすように，b，c，d の値を定めよ．

(1) $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ より $f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

増減表とグラフは以下のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	↗	$-\frac{23}{27}$	↘	-1	↗	1	



したがって，$f(a)=0$，$1<a<2$ を満たす実数 a が１つだけ存在する．

(2) (1)の a について，$f(a)=0$ すなわち $a^3-2a^2+a-1=0$

$a\neq 0$ より，この式の両辺を a^3 で割って

$$1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(-\frac{1}{a}\right)^3+\left(-\frac{1}{a}\right)^2+2\left(-\frac{1}{a}\right)+1=0$$

よって，$x=-\dfrac{1}{a}$ を解にもつ x^3 の係数が１の３次方程式の１つとして

$x^3+x^2+2x+1=0$ があげられる．

これと $g(x)=0$ つまり $x^3+bx^2+cx+d=0$ を係数比較して $\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=2}$，$\boldsymbol{d=1}$

３次方程式の実数解は少なくとも１つ存在するのであるが，それを計算により導くことが困難である場合も少なくない．それを題材にした問題もやはり少なくない．(2)では未定係数が３つあるためどうしたものかと悩んだ人もいるであろう．「(1)の a について」という文章から $a^3-2a^2+a-1=0$ の式が作れたのであればこの式をどのように利用するかをじっくり考えたであろう．いかがか？

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。